

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2023, Convocatoria
extraordinaria

mentoor.es



Sèrie 2

Ejercicio 1. Álgebra

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Compruebe que $(A - 2I)^2 = 3I$.
- Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B.
- Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A \cdot X = B$.

Solución:

- Compruebe que $(A - 2I)^2 = 3I$.

Primero, calculamos la matriz $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación, elevamos esta matriz al cuadrado:

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, observamos que esta matriz resultante es igual a $3I$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I.$$

Queda comprobada la igualdad.

La igualdad $(A - 2I)^2 = 3I$ es correcta.

- Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B.

Partimos de la igualdad $(A - 2I)^2 = 3I$ y desarrollamos el binomio:

$$(A - 2I)(A - 2I) = 3I \implies A^2 - 2AI - 2IA + 4I^2 = 3I \implies A^2 - 4A + 4I = 3I.$$

Reordenamos la ecuación para aislar la matriz identidad:

$$A^2 - 4A = 3I - 4I \implies A^2 - 4A = -I.$$

Multiplicamos toda la ecuación por -1 :

$$-A^2 + 4A = I \implies 4A - A^2 = I.$$

Sacamos factor común A por la izquierda:

$$A(4I - A) = I.$$

Por definición, la matriz inversa de A , denotada A^{-1} , es aquella que cumple $A \cdot A^{-1} = I$. Por lo tanto, hemos encontrado que:

$$A^{-1} = 4I - A.$$

Ahora, calculamos esta expresión:

$$A^{-1} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es exactamente la matriz B .

$A^{-1} = 4I - A$, que coincide con la matriz B .

c) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A \cdot X = B$.

Para despejar la matriz X , multiplicamos por la izquierda por la inversa de A , A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies I \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1}B.$$

Del apartado anterior, sabemos que $A^{-1} = B$. Por lo tanto:

$$X = B \cdot B = B^2.$$

Calculamos B^2 :

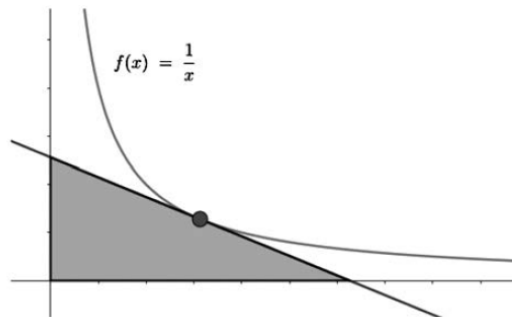
$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & -2-2 \\ -6-6 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 2. Análisis

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$.
- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = k$, en que k es un nombre real positivo.
- Compruebe que, tal como se puede ver en la figura de sota, la recta del apartado b determina un triángulo de área constante con los semieixos positivos de coordenadas. Calcule esta área.



Solución:

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$.

La ecuación de la recta tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, con $a = 2$.

– $f(2) = 1/2$. El punto de tangencia es $(2, 1/2)$.

– La derivada es $f'(x) = -1/x^2$.

– La pendiente en $x = 2$ es $f'(2) = -1/2^2 = -1/4$.

La ecuación es: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \implies y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \implies y = -\frac{1}{4}x + 1$.

La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = k$, en que k es un nombre real positivo.

Seguimos el mismo procedimiento con $a = k$.

– $f(k) = 1/k$. El punto de tangencia es $(k, 1/k)$.

– La pendiente en $x = k$ es $f'(k) = -1/k^2$.

La ecuación es: $y - \frac{1}{k} = -\frac{1}{k^2}(x - k) \implies y = -\frac{1}{k^2}x + \frac{k}{k^2} + \frac{1}{k} \implies y = -\frac{1}{k^2}x + \frac{2}{k}$.

La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{1}{k^2}x + \frac{2}{k}$.

- Compruebe que, tal como se puede ver en la figura de sota, la recta del apartado b determina un triángulo de área constante con los semieixos positivos de coordenadas. Calcule esta área.

La recta es $y = -\frac{1}{k^2}x + \frac{2}{k}$. Para encontrar los vértices del triángulo, calculamos sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- **Corte con el eje OY ($x=0$):** $y = 0 + \frac{2}{k} = \frac{2}{k}$. El punto de corte es $(0, 2/k)$.
- **Corte con el eje OX ($y=0$):** $0 = -\frac{1}{k^2}x + \frac{2}{k} \implies \frac{1}{k^2}x = \frac{2}{k} \implies x = 2k$. El punto de corte es $(2k, 0)$.

El triángulo es rectángulo, con vértices en $(0, 0)$, $(2k, 0)$ y $(0, 2/k)$. La base del triángulo mide $2k$ y la altura mide $2/k$.

Calculamos el área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot (2k) \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{4k}{2k} = 2.$$

El resultado es 2, un valor constante que no depende de k .

El área del triángulo es constante e igual a 2 u².

Ejercicio 3. Álgebra

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{cases}$$

en que m es un nombre real.

- Discuta el sistema según los valores del parámetro m .
- Resuelva el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$.

Solución:

- Discuta el sistema según los valores del parámetro m .

Primero, reordenamos el sistema a su forma estándar:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= 2(-m^2 - 1) - 1(-m - 3) + (-1)(1 - 3m) \\ &= -2m^2 - 2 + m + 3 - 1 + 3m \\ &= -2m^2 + 4m \end{aligned}$$

Igualemos el determinante a cero: $-2m^2 + 4m = 0 \implies -2m(m - 2) = 0$. Las raíces son $m = 0$ y $m = 2$.

Caso 1: $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $m = 0$
 $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)$. $\text{Rg}(A) = 2$.

Sumando F1 y F2, obtenemos $(3, 1, 0|3)$, que es la F3. Por tanto, $\text{Rg}(A^*) = 2$.
 $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

Caso 3: $m = 2$ $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right)$. $\text{Rg}(A) = 2$. El menor C_1, C_2, C_4 es $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-3) + 1(-5) = 8 + 3 - 5 = 6 \neq 0$. $\text{Rg}(A^*) = 3$. $\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es **Incompatible (S.I.)**.

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \implies \text{S.C.D.}$ Si $m = 0 \implies \text{S.C.I.}$ Si $m = 2 \implies \text{S.I.}$

b) Resuelva el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$.

Para $m = 1$, el sistema es Compatible Determinado. El sistema es:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + y - z = 3 \end{cases}$$

Lo resolvemos por la Regla de Cramer. El determinante es $|A| = -2(1)^2 + 4(1) = 2$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1(-2) - 1(-5) - 1(-1)}{2} = \frac{-2 + 5 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2(-5) - 1(-4) - 1(-3)}{2} = \frac{-10 + 4 + 3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2(1) - 1(-3) + 1(-2)}{2} = \frac{2 + 3 - 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

La solución es $x = 2, y = -3/2, z = 3/2$.

Ejercicio 4. Análisis

Sea la función $f(x)$ definida por $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

- Justifique que $f(x) = 2$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 0)$.
- Sea la función $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región compuesta entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

Solución:

- Justifique que $f(x) = 2$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 0)$.

La ecuación $f(x) = 2$ es equivalente a $-3x + e^{2x^3-1} = 2$, o lo que es lo mismo, $-3x + e^{2x^3-1} - 2 = 0$. Definimos una nueva función $g(x) = f(x) - 2 = -3x + e^{2x^3-1} - 2$. Debemos justificar que $g(x) = 0$ tiene solución en $(-1, 0)$.

Aplicaremos el Teorema de Bolzano a $g(x)$ en el intervalo $[-1, 0]$.

- Continuidad:** $g(x)$ es una suma de un polinomio y una exponencial, ambas funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

Por tanto, $g(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

- Signo en los extremos:**

$$- g(-1) = -3(-1) + e^{2(-1)^3-1} - 2 = 3 + e^{-3} - 2 = 1 + e^{-3} = 1 + \frac{1}{e^3} > 0.$$

$$- g(0) = -3(0) + e^{2(0)^3-1} - 2 = e^{-1} - 2 = \frac{1}{e} - 2 < 0.$$

Como la función es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo, el Teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un punto $c \in (-1, 0)$ tal que $g(c) = 0$.

Queda justificado por el Teorema de Bolzano.

- Sea la función $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región compuesta entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

Primero, encontramos los puntos de intersección de $f(x)$ y $h(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = h(x) &\implies -3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1} \\ -3x = -3x^2 &\implies 3x^2 - 3x = 0 \implies 3x(x-1) = 0. \end{aligned}$$

Los puntos de corte son en $x = 0$ y $x = 1$. El área se calculará en el intervalo $[0, 1]$.

El área es $A = \int_0^1 |h(x) - f(x)| dx$.

$$h(x) - f(x) = (-3x^2 + e^{2x^3-1}) - (-3x + e^{2x^3-1}) = -3x^2 + 3x.$$

En el intervalo $(0, 1)$, por ejemplo para $x = 0.5$, la expresión es $-3(0.25) + 3(0.5) > 0$. Por tanto, $h(x) \geq f(x)$ en $[0, 1]$.

$$A = \int_0^1 (-3x^2 + 3x) dx = \left[-x^3 + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = \left(-1^3 + \frac{3(1)^2}{2} \right) - (0) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

El área de la región es $1/2$ u².



Ejercicio 5. Geometría

Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1 : x - 1 = y = -z$ y por $r_2 : x = y = z$, respectivamente.

- Calcule la ecuación paramétrica de la recta que talla perpendicularmente las rectas r_1 y r_2 .
- Calcule la distancia entre r_1 y r_2 .

Solución:

- Calcule la ecuación paramétrica de la recta que talla perpendicularmente las rectas r_1 y r_2 .

Obtenemos un punto y vector director para cada recta:

$$r_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \implies P_1(1, 0, 0), \vec{v}_1 = (1, 1, -1).$$

$$r_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \implies P_2(0, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 1).$$

La recta s que corta perpendicularmente a ambas tendrá como vector director $\vec{v}_s$ el producto vectorial de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -2, 0). \text{ Podemos usar } (1, -1, 0).$$

Un punto genérico de r_1 es $R_1(1 + \lambda, \lambda, -\lambda)$.

Un punto genérico de r_2 es $R_2(\mu, \mu, \mu)$.

El vector $\vec{R_1R_2} = (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda)$ debe ser perpendicular a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$.

Usamos el producto escalar:

$$\vec{R_1R_2} \cdot \vec{v}_1 = 0 \implies (\mu - \lambda - 1) + (\mu - \lambda) - (\mu + \lambda) = 0 \implies \mu - 3\lambda - 1 = 0.$$

$$\vec{R_1R_2} \cdot \vec{v}_2 = 0 \implies (\mu - \lambda - 1) + (\mu - \lambda) + (\mu + \lambda) = 0 \implies 3\mu - \lambda - 1 = 0.$$

Resolvemos el sistema: $\mu = 3\lambda + 1 \implies 3(3\lambda + 1) - \lambda - 1 = 0 \implies 9\lambda + 3 - \lambda - 1 = 0 \implies 8\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = -1/4$. $\mu = 3(-1/4) + 1 = 1/4$.

El punto de corte en r_1 es $R_1(1 - 1/4, -1/4, 1/4) = (3/4, -1/4, 1/4)$.

La recta perpendicular pasa por este punto y tiene vector director $(1, -1, 0)$.

La ecuación es $\begin{cases} x = 3/4 + t \\ y = -1/4 - t \\ z = 1/4 \end{cases}$.

- Calcule la distancia entre r_1 y r_2 .

La distancia entre las dos rectas es la distancia entre los puntos de la perpendicular común, R_1 y R_2 .

$$R_1(3/4, -1/4, 1/4).$$

$$R_2(\mu, \mu, \mu) = (1/4, 1/4, 1/4).$$



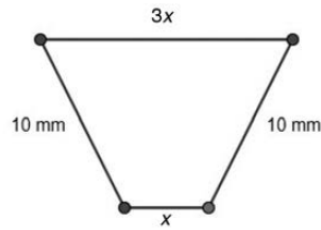
$$\begin{aligned}d(r_1, r_2) &= d(R_1, R_2) = \sqrt{(3/4 - 1/4)^2 + (-1/4 - 1/4)^2 + (1/4 - 1/4)^2} \\&= \sqrt{(1/2)^2 + (-1/2)^2 + 0^2} = \sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

La distancia es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ u.

Ejercicio 6. Análisis

Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros costados del trapecio hacen 10 mm, tal como podéis observar en la figura siguiente:

- Expresar la altura del trapecio en función de la longitud x de la base inferior.
- Calcular la longitud de la base inferior del trapecio de manera que el área de la pieza sea máxima y encontrar el valor de esta área máxima.



Solución:

- Expresar la altura del trapecio en función de la longitud x de la base inferior.

Sea B la base superior y b la inferior. Según el enunciado, $b = x$ y $B = 3x$.

Al trazar las alturas desde los vértices de la base inferior, se forma un rectángulo central y dos triángulos rectángulos iguales a los lados.

La base de cada uno de estos triángulos rectángulos es la semidiferencia de las bases: $\frac{B-b}{2} = \frac{3x-x}{2} = x$. La hipotenusa de estos triángulos es el lado oblicuo, que mide 10 mm.

Aplicando el Teorema de Pitágoras a uno de estos triángulos:

$$h^2 + x^2 = 10^2 \implies h^2 = 100 - x^2 \implies h = \sqrt{100 - x^2}.$$

El dominio para que esta altura tenga sentido es $0 < x < 10$.

La altura del trapecio es $h(x) = \sqrt{100 - x^2}$.

- Calcular la longitud de la base inferior del trapecio de manera que el área de la pieza sea máxima y encontrar el valor de esta área máxima.

El área del trapecio es $A = \frac{(B+b)h}{2}$. Sustituyendo las expresiones en función de x :

$$A(x) = \frac{(3x+x)\sqrt{100-x^2}}{2} = \frac{4x\sqrt{100-x^2}}{2} = 2x\sqrt{100-x^2}.$$

Para maximizar, derivamos $A(x)$ e igualamos a cero.

$$A'(x) = 2\sqrt{100-x^2} + 2x \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}}.$$

$$A'(x) = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

Igualemos a cero el numerador: $200 - 4x^2 = 0 \implies 4x^2 = 200 \implies x^2 = 50 \implies x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
(Se descarta la solución negativa por el contexto del problema).

Se puede comprobar que $A'(x)$ es positiva para $x < 5\sqrt{2}$ y negativa para $x > 5\sqrt{2}$, por lo que se trata de un máximo.

Calculamos el área máxima con $x = 5\sqrt{2}$:

$$A_{max} = 2(5\sqrt{2})\sqrt{100 - 50} = 10\sqrt{2}\sqrt{50} = 10\sqrt{100} = 10(10) = 100.$$

La base inferior debe ser $x = 5\sqrt{2}$ mm. El área máxima es 100 mm².